KAJIAN TEORI PENYELESAIAN MASALAH JARAK DAN SUDUT PADA BANGUN RUANG DIMENSI TIGA MENGGUNAKAN PENDEKATAN VEKTOR

Andi Pujo Rahadi
FKIP Universitas Advent Indonesia

Abstrak

Materi utama dalam bab Geometri Dimensi Tiga di tingkat SMA/MA adalah penghitungan jarak dan sudut antara unsur-unsur ruang, yaitu titik, garis, dan bidang. Sedangkan materi yang dibahas dalam bab Vektor meliputi: penambahan, perkalian titik, perkalian silang, dan proyeksi orthogonal. Penulis mengamati bahwa dua bab tersebut direspon secara berbeda oleh siswa SMA/MA. Masalah jarak dan sudut pada bangun ruang dimensi tiga merupakan masalah yang dirasakan sulit oleh mayoritas siswa SMA . Di sisi lain, konsep dan rumus-rumus vektor relatif lebih mudah dipahami. Adapun kesulitan yang dirasakan siswa ketika menghadapi masalah jarak atau sudut dimensi tiga adalah kesulitan spasial. Artinya, siswa seringkali tidak berhasil membayangkan secara tepat posisi bidang-bidang, garis-garis, maupun titik-titik yang perlu dihitung jarak atau sudutnya. Dalam paper ini, akan dikembangkan suatu pendekatan vektor untuk menyelesaikan masalah jarak dan sudut pada bangun ruang dimensi tiga, baik itu kubus, balok, maupun limas. Dengan menggunakan pendekatan vektor, diharapkan siswa dapat lebih mudah memahami konsep ruang dimensi tiga dan mampu lebih cepat dalam menyelesaikan penghitungan jarak maupun sudut.

Kata kunci : Geometri, Bangun Ruang, Dimensi Tiga, Vektor, Jarak, Sudut.

Abstract

The main material in the Dimension Three Geometry chapter at the SMA / MA level is the calculation of the distance and the angle between space elements, ie points, lines, and planes. While the material discussed in the Vector chapter includes: addition, point multiplication, cross product, and orthogonal projection. The author observes that the two chapters are responded differently by high school / MA students. The problem of distance and angle in the wake of the three dimensional space is a problem that is felt difficult by the majority of high school students. On the other hand, vector concepts and formulas are relatively easier to understand. The difficulties students experience when facing the problem of distance or angle of the three dimensions is spatial difficulty. That is, students often can not succeed in imagining precisely the position of fields, lines, or points that need to be calculated distance or angle. In this paper, a vector approach will be developed to solve the problem of distance and angle on the building of three dimensional space, be it cube, beam, or pyramid. By using the vector approach, it is expected that students can more easily understand the concept of three dimensional space and can be faster in completing the calculation of distance and angle.

Keywords: *Geometry, Space Building, Dimension Three, Vector, Distance, Angle.*

Pendahuluan

Dalam kurikulum Matematika tingkat SMA/MA, baik KTSP 2006 maupun Kurikulum 2013 (*kurtilas*), bab Dimensi Tiga merupakan salah satu bab yang wajib diajarkan kepada siswa. Soal-soal yang terkait dengan bab tersebut juga selalu muncul, baik dalam Ujian Nasional maupun dalam ujian seleksi masuk Perguruan Tinggi.

Dalam bab dimensi tiga tersebut, topik utama yang disajikan adalah masalah penghitungan jarak dan sudut antar unsur-unsur geometri yang terdapat di dalam berbagai jenis bangun ruang, mulai dari kubus, balok, hingga limas. Unsur-unsur geometri yang dimaksud adalah titik, garis, dan bidang.

Sejauh pengamatan penulis, di dalam buku-buku pelajaran Matematika SMA/MA di Indonesia, metode penyelesaian masalah jarak dan sudut pada umumnya menggunakan pendekatan spasial, dan penghitungannya menggunakan rumus-rumus konvensional, di antaranya rumus Phytagoras, rumus luas segitiga, rumus-rumus trigonometri, dan rumus kesebangunan. Pendekatan spasial yang dimaksud ialah menyederhanakan bidang yang sedang dibicarakan menjadi suatu garis, kemudian menyederhanakan masalah dimensi tiga (ruang) menjadi masalah dimensi dua (bidang), dan diakhiri dengan penggunaan rumus-rumus konvensional di atas. Belum ada buku yang membahas penggunaan pendekatan vektor dan matriks untuk menganalisis dan menyelesaikan masalah penghitungan jarak dan sudut tersebut.

Dengan pendekatan spasial dan rumus konvensional tersebut, peneliti menemukan banyak keluhan dari para siswa mengenai masalah penghitungan jarak dan sudut ini. Beberapa keluhan yang sering muncul antara lain :

1. Siswa tidak yakin terhadap penafsiran geometrinya sendiri ketika menyederhanakan masalah dimensi tiga menjadi masalah dimensi dua.
2. Dirasa cukup sulit membayangkan kedudukan garis atau bidang yang dimaksud oleh soal latihan atau soal ujian, terutama dalam membayangkan letak garis proyeksi suatu garis pada bidang tertentu.
3. Setiap jenis masalah memiliki langkah-langkah kerja yang dirasa sangat berbeda, contohnya langkah penghitungan sudut antara dua garis dirasa sangat berbeda dengan penghitungan sudut antara dua bidang.
4. Waktu pengerjaan satu soal dimensi tiga lebih dari 5 menit, di mana waktu rata-rata mengerjakan soal Ujian Nasional seharusnya 3 menit, bahkan waktu rata-rata mengerjakan soal seleksi ujian masuk Perguruan Tinggi adalah 1 menit.

Kesulitan dan keluhan tersebut menyebabkan turunnya minat anak didik terhadap bab dimensi tiga pada khususnya, dan bidang geometri pada umumnya. Dengan demikian diperlukan suatu pendekatan lain untuk diajarkan kepada siswa yang mengalami kesulitan menggunakan pendekatan spasial ketika menyelesaikan masalah jarak dan sudut dalam bangun ruang dimensi tiga. Untuk itulah kajian teori ini dilakukan.

Pendekatan vektor yang dimaksud dalam kajian teori ini melibatkan :

1. Pembentukan vektor dari garis-garis di dalam bangun ruang
2. Pembentukan vektor normal bidang-bidang yang terletak di dalam kubus atau balok
3. Operasi penambahan dan pengurangan pada vektor
4. Hasil kali titik (*dot product*)
5. Hasil kali silang (*cross product*)
6. Proyeksi orthogonal suatu vektor pada vektor lain
7. Rumus sudut antara dua vektor

Dengan pendekatan vektor tersebut, diharapkan siswa dapat lebih mudah memahami dan menyelesaikan masalah-masalah jarak dan sudut pada bangun ruang dimensi tiga, yaitu: kubus, balok, dan limas.

Ringkasan mengenai Vektor

Secara aljabar, vektor dalam $\mathbb{R}^n$ dapat didefinisikan sebagai matriks berordo $n \times 1$. Marilah kita tinjau suatu vektor $\vec{a}$ dalam $\mathbb{R}^3$. Berdasarkan komponennya, $\vec{a}$ dapat dituliskan

$$\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

1.1. Pembentukan vektor

Setiap garis dalam bangun ruang dimensi tiga dapat dinyatakan sebagai vektor. Mari kita perhatikan contoh berikut :

<u>Contoh 1</u>

Diberikan kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk r . Nyatakan garis $AB, AG, DF, dan\ HB$ sebagai vektor dengan ketentuan :

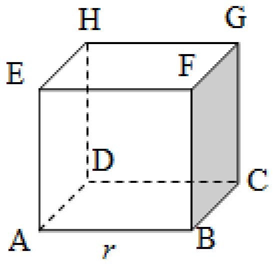
(1) Arah X positif adalah ke kanan

(2) Arah Y positif adalah masuk bidang gambar

(3) Arah Z positif adalah ke atas.

Penyelesaian

Kita gambarkan kubus ABCD.EFGH



Gambar 1. Kubus ABCD.EFGH

Vektor AB memiliki komponen ke kanan $(X +)$ sebesar r, dan tidak memiliki komponen Y maupun Z, sehingga kita tuliskan

$$\overrightarrow{AB} = (r\,,0\,,0)$$

Vektor AG memiliki komponen ke kanan $(X +)$ sebesar r, komponen ke dalam $(Y +)$ sebesar r, dan komponen ke atas $(Z +)$ sebesar r, sehingga kita tuliskan

$$\overrightarrow{AG} = (r\,,r\,,r)$$

Vektor DF memiliki komponen ke kiri $(X -)$ sebesar r, komponen ke dalam $(Y +)$ sebesar r, dan komponen ke bawah $(Z -)$ sebesar r, sehingga kita tuliskan

$$\overrightarrow{DF} = (-r\,,r\,,-r)$$

Vektor HB memiliki komponen ke kanan $(X +)$ sebesar r, komponen ke luar $(Y -)$ sebesar r, dan komponen ke bawah $(Z -)$ sebesar r, sehingga kita tuliskan

$$\overrightarrow{HB} = (r\,,-r\,,-\,r)$$

Catatan : Dalam keseluruhan paper ini, ketentuan arah sumbu X, Y, dan Z akan mengikuti ketentuan dalam Contoh 1 ini.

1.2. Perkalian Titik dan Perkalian Silang pada Vektor

Kita tinjau dua vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ pada $\mathbb{R}^3$. Operasi perkalian titik (*inner product*) antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ didefinisikan sebagai berikut :

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Di mana $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$, dan $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

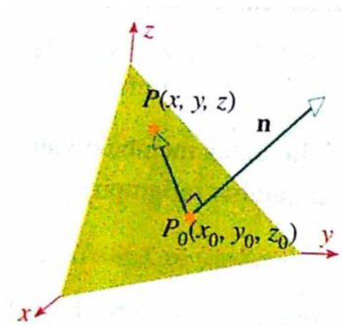
Selain *inner product*, pada vektor juga didefinisikan operasi perkalian silang (*cross product*) sebagai berikut :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$dengan \ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

1.3. Pembentukan vektor normal bidang

Kemiringan suatu bidang dalam bangun ruang tiga dimensi dapat ditunjukkan dengan menentukan suatu vektor tak nol, yang disebut vektor normal, yang tegak lurus terhadap bidang tersebut.

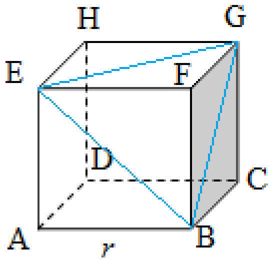


Gambar 2. Vektor normal Bidang

Sumber : Anton Rorres, Aljabar Linear

Vektor normal suatu bidang α dapat diperoleh dengan melakukan perkalian silang antara sebarang dua vektor anggota dari bidang α tersebut.

Sebagai contoh, perhatikan kembali kubus pada Gambar 1. Kita akan menentukan vektor normal dari bidang BEG.



Gambar 3. Bidang BEG di dalam kubus ABCD.EFGH

Mula-mula, dibentuk dua vektor anggota bidang BEG, yaitu vektor $\overrightarrow{BE}$ dan $\overrightarrow{BG}$.

$$\overrightarrow{BE} = (-r\,,0\,,r)$$

$$\overrightarrow{BG} = (0\,,r\,,r)$$

Kemudian kita kalikan secara *cross product*

$$\overrightarrow{BE} \times \overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ r \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BE} \times \overrightarrow{BG} = \left(\begin{vmatrix} 0 & r \\ r & r \end{vmatrix} , - \begin{vmatrix} -r & 0 \\ r & r \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} -r & 0 \\ 0 & r \end{vmatrix} \right)$$

$$\overrightarrow{BE} \times \overrightarrow{BG} = (-r^2\,,r^2\,,-r^2)$$

Sederhanakan hasil kali silang itu untuk mendapatkan vektor normal yang sederhana, dalam hal ini $\overrightarrow{BE} \times \overrightarrow{BG}$ kita bagi dengan r^2, didapatkan

$$\vec{N} = (-1\,,1\,,-1)$$

Untuk menunjukkan bahwa vektor $\vec{N}$ tersebut tegak lurus terhadap bidang BEG, kita perhatikan dahulu teorema 2.1.

Teorema 2.1.

(1) Dua vektor bersifat saling tegak lurus jika dan hanya jika hasil kali titiknya (*inner product*) sama dengan nol.

(2) Jika suatu vektor $\vec{N}$ tegak lurus terhadap sebarang dua vektor anggota bidang α, maka vektor $\vec{N}$ tersebut tegak lurus terhadap bidang α.

Sekarang, mari kita periksa hasil kali titik (*inner product*) antara $\vec{N}$ dengan $\overrightarrow{BE}$, dan $\vec{N}$ dengan $\overrightarrow{BG}$, di mana $\overrightarrow{BE}$ dan $\overrightarrow{BG}$ merupakan anggota dari bidang BEG.

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{BE} = (-1\,,1\,,-1) \cdot (-r\,,0\,,r) = r + 0 - r = 0$$

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{BG} = (-1\,,1\,,-1) \cdot (0\,,r\,,r) = 0 + r - r = 0$$

Jadi, $\vec{N} = (-1\,,1\,,-1)$ tegak lurus terhadap bidang BEG.

1.4. Proyeksi Orthogonal suatu Vektor pada Vektor Lain

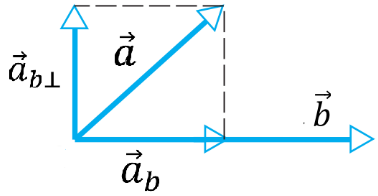
Setiap vektor dapat diuraikan menjadi dua vektor baru yang saling tegak lurus (orthogonal). Vektor baru hasil penguraian itulah yang dinamakan vektor proyeksi. Sebagai contoh, kita dapat menguraikan vektor $\vec{a}$ menjadi $\vec{a}_b$ dan $\vec{a}_{b\perp}$ di mana

$$\vec{a}_b \; adalah \; proyeksi \; \vec{a} \; pada \; arah \; sejajar \; dengan \; \vec{b}$$

$$\vec{a}_{b\perp} \; adalah \; proyeksi \; \vec{a} \; pada \; arah \; tegak \; lurus \; dengan \; \vec{b}$$

$$\vec{a}_b + \vec{a}_{b\perp} = \vec{a}$$

Digambarkan



Gambar 4. Proyeksi $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

Rumus dasar vektor proyeksi $\vec{a}$ pada arah sejajar dengan $\vec{b}$ adalah

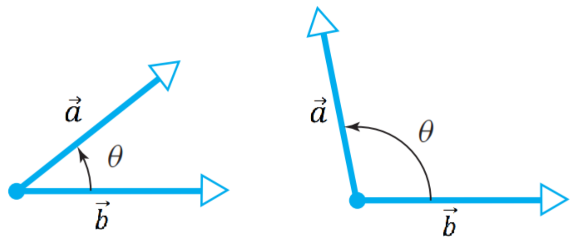
$$\vec{a}_b = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\right)\vec{b}$$

Rumus dasar panjang proyeksi $\vec{a}$ pada arah sejajar dengan $\vec{b}$ adalah

$$|\vec{a}_b| = \left|\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}\right|$$

1.5. Sudut antara dua vektor

Dua vektor dikatakan membentuk sudut sebesar θ (lancip ataupun tumpul) bila sudut θ tersebut berlawanan arah dengan jarum jam dan dibentuk dengan menghimpitkan pangkal-pangkal kedua vektor, sebagaimana ditunjukkan pada gambar berikut :



Gambar 5. Sudut antara dua vektor

Besar sudut θ tersebut dapat dihitung berdasarkan rumus perkalian titik yaitu

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Penyelesaian Masalah Jarak dan Sudut

Pendekatan vektor dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah jarak maupun sudut antara unsur-unsur di dalam bangun ruang tiga dimensi. Masalah-masalah yang dimaksud adalah :

(1) Jarak antara dua titik
(2) Jarak titik ke garis
(3) Jarak titik ke bidang
(4) Jarak antara dua garis sejajar
(5) Jarak antara dua bidang sejajar
(6) Jarak garis ke bidang yang sejajar
(7) Jarak antara dua garis bersilangan
(8) Sudut antara dua garis
(9) Sudut antara dua bidang
(10) Sudut antara garis dengan bidang

Dalam kajian teori ini beberapa masalah di atas akan dibahas secara detail, sedangkan masalah yang lainnya akan dibahas secara ringkas saja.

1.6. Jarak antara Dua Titik

Untuk menghitung jarak antara dua titik, kita bentuk vektor yang menghubungkan dua titik itu, kemudian kita hitung panjangnya.

1.7. Jarak Titik ke Garis

Untuk menghitung jarak suatu titik P ke suatu garis l, dilakukan langkah-langkah berikut:

(1) Bentuklah vektor yang menghubungkan titik P ke salah satu titik anggota garis l, namakan vektor $\vec{u}$

(2) Bentuklah vektor garis yang dituju, namakan vektor $\vec{v}$

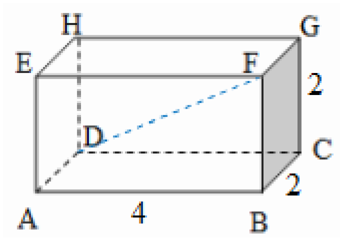
(3) Tentukan proyeksi $\vec{u}$ pada arah tegak lurus $\vec{v}$, lalu hitung panjangnya.

Contoh 2

Diberikan balok ABCD.EFGH dengan panjang $= 4$, $AD = 2$, dan $AE = 2$. Tentukan jarak titik E ke garis FD !

Penyelesaian

Kita gambarkan balok yang dimaksud



Hubungkan titik E ke titik D anggota garis FD, diperoleh vektor $\overrightarrow{DE}$ yaitu

$$\overrightarrow{DE} = (0\,,-2\,,2\,)$$

Dibentuk pula vektor $\overrightarrow{DF} = (4\,,-2\,,2)$

Namakan $\vec{u}_v$ adalah proyeksi $\overrightarrow{DE}$ pada arah sejajar $\overrightarrow{DF}$ yaitu

$$\vec{u}_v = \left(\frac{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}}{\left|\overrightarrow{DF}\right|^2}\right)\overrightarrow{DF}$$

$$\vec{u}_v = \left(\frac{(0\,,-2\,,2\,)\cdot(4\,,-2\,,2)}{4^2+(-2)^2+2^2}\right)\overrightarrow{DF}$$

$$\vec{u}_v = \frac{1}{3}(4\,,-2\,,2)$$

Selanjutnya kita cari proyeksi $\overrightarrow{DE}$ pada arah tegak lurus $\overrightarrow{DF}$, namakan $\vec{u}_{v\perp}$, yaitu vektor $\overrightarrow{DE}$ dikurangi dengan $\vec{u}_v$,

$$\vec{u}_{v\perp} = \overrightarrow{DE} - \vec{u}_v$$

$$\vec{u}_{v\perp} = (0\,,-2\,,2\,) - \frac{1}{3}(4\,,-2\,,2)$$

$$\vec{u}_{v\perp} = \frac{1}{3}\,(-4\,,-4\,,4)$$

Jarak dari E ke FD sama dengan panjang vektor $\vec{u}_{v\perp}$ tersebut, yaitu

$$|\vec{u}_{v\perp}| = \frac{1}{3}\sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 4^2} = \frac{4}{3}\sqrt{3}\,.$$

1.8. Jarak Titik ke Bidang

Untuk menghitung jarak suatu titik P ke suatu bidang α, dilakukan langkah-langkah berikut

(1) Bentuklah vektor yang menghubungkan titik P ke salah satu titik anggota bidang α, namakan vektor $\vec{u}$

(2) Bentuklah vektor normal yang tegak lurus dengan bidang α, namakan vektor $\vec{N}$

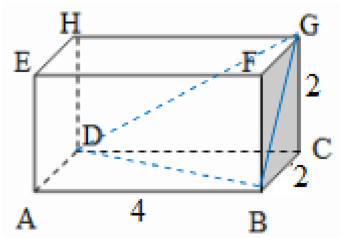
(3) Tentukan proyeksi $\vec{u}$ pada arah sejajar $\vec{N}$, lalu hitung panjangnya.

Contoh 3

Diberikan balok ABCD.EFGH dengan panjang $= 4$, $AD = 2$, dan $AE = 2$. Tentukan jarak titik E ke bidang BDG !

Penyelesaian

Balok yang dimaksud adalah



Hubungkan titik E ke titik B, diperoleh vektor BE yaitu

$$\overrightarrow{BE} = (-4\,, 0\,, 2\,)$$

Kemudian, kita hitung perkalian silang antara $\overrightarrow{BD}\ dengan\overrightarrow{BG}$

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Diperoleh vektor normal dari bidang BDG, namakan $\vec{N}$, kita pilih ${}^{1}\!/_{4}$ dari $\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BG}$,

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya hitung panjang proyeksi dari $\overrightarrow{BE}$ ke $\vec{N}$, didapat

$$\left|\overrightarrow{BE}_N\right| = \left|\frac{\overrightarrow{BE}\ \cdot \vec{N}}{|\vec{N}\ |}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{BE}_N\right| = \left|\frac{(-4\ ,0\ ,2\ )\cdot(1\ ,2\ ,-2\ )}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}\right| = \left|\frac{-8}{3}\right| = \frac{8}{3}$$

Jadi, jarak titik E ke bidang BDG adalah $^8/_3$.

1.9. Jarak antara Dua Garis Sejajar

Untuk menghitung jarak antara garis l_1 dengan garis l_2 , di mana $l_1 \parallel l_2$, pilih salah satu titik anggota l_1, lalu hitung jaraknya ke garis l_2 berdasarkan langkah-langkah pada bagian 3.2.

1.10. Jarak antara Dua Bidang Sejajar

Untuk menghitung jarak antara bidang α dengan bidang , di mana $\alpha \parallel \beta$, pilih salah satu titik anggota α, lalu hitung jaraknya ke bidang β berdasarkan langkah-langkah pada bagian 3.3.

1.11. Jarak antara Garis dengan Bidang yang Sejajar

Untuk menghitung jarak antara garis l dengan bidang , di mana $l \parallel \alpha$, pilih salah satu titik anggota garis l, lalu hitung jaraknya ke bidang α berdasarkan langkah-langkah pada bagian 3.3.

1.12. Jarak antara Dua Garis Bersilangan

Untuk menghitung jarak antara garis l_1 dengan garis l_2 , di mana l_1 bersilangan dengan l_2, dilakukan langkah-langkah berikut

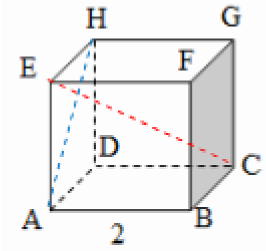
(1) Bentuklah vektor yang menghubungkan suatu titik P_1 anggota l_1 ke suatu titik P_2 anggota l_2 , namakan vektor $\vec{u}$,

(2) Bentuklah vektor normal yang tegak lurus dengan l_1 dan l_2, namakan vektor $\vec{N}$

(3) Tentukan proyeksi $\vec{u}$ pada arah sejajar $\vec{N}$, lalu hitung panjangnya.

<u>Contoh 4</u>

Pada kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 2, hitunglah jarak antara garis AH dengan garis CE.



Penyelesaian

Hubungkan titik A anggota garis AH dengan titik E anggota garis CE, didapat vektor

$$\overrightarrow{AE} = (0\,,0\,,2)$$

Lalu kita hitung *cross product* antara $\overrightarrow{AH}$ dengan $\overrightarrow{EC}$

$$\overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Vektor normal $\vec{N}$, yaitu vektor yang tegak lurus dengan $\overrightarrow{AH}$ maupun $\overrightarrow{EC}$, kita pilih $-1/_4$ dari $\overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{EC}$, didapat

$$\vec{N} = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya hitung panjang proyeksi dari $\overrightarrow{AE}$ ke $\vec{N}$, didapat

$$\left|\overrightarrow{AE}_N\right| = \left|\frac{\overrightarrow{AE} \cdot \vec{N}}{|\vec{N}\,|}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{AE}_N\right| = \left|\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}}\right| = \frac{2}{3}$$

Jadi, jarak garis AH ke garis CE adalah $^2/_3$.

1.13. Sudut antara Dua Garis

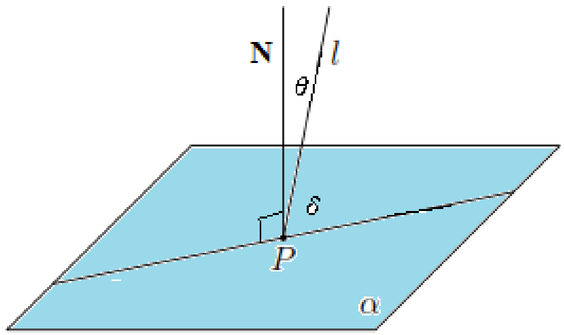
Sudut antara garis l_1 dengan garis l_2 pada dasarnya adalah sudut terkecil antara vektor-vektor yang sejajar dengan masing-masing garis tersebut.

1.14. Sudut antara Dua Bidang

Sudut antara bidang α dengan bidang β pada dasarnya adalah sudut terkecil antara vektor normal-vektor normal dari masing-masing bidang tersebut.

1.15. Sudut antara Garis dengan Bidang

Untuk memahami langkah-langkah menghitung sudut antara suatu garis l dengan suatu bidang α, mari kita perhatikan gambar berikut :



Dalam gambar tersebut, garis l membentuk sudut sebesar δ terhadap bidang α. Tampak pula bahwa garis l membentuk sudut sebesar θ terhadap vektor normal α, yaitu vektor $\vec{N}$. Jelas berlaku $\delta + \theta = 90°$.

Dengan kata lain, sudut δ merupakan penyiku dari sudut θ, di mana cosinus sudut θ bisa diperoleh dari perkalian titik antara vektor yang sejajar l (namakan $\vec{u}$) dengan vektor $\vec{N}$, yaitu

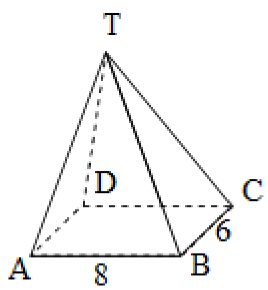
$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{N}}{|\vec{u}||\vec{N}|}$$

<u>Contoh 5</u>

Diberikan limas segiempat T.ABCD dengan panjang $AB = 8$, $AD = 6$, dan $AT = 13$. Tentukan tangen sudut yang dibentuk oleh rusuk AT dengan bidang TBC.

<u>Penyelesaian</u>

Kita gambarkan limas yang dimaksud sebagai berikut :



Namakan titik O sebagai titik pusat alas ABCD, sehingga tinggi limas pada dasarnya adalah jarak dari titik T ke O . Dimisalkan tinggi limas adalah h, berarti vektor $\overrightarrow{AT}$ adalah

$$\overrightarrow{AT} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ h \end{pmatrix}$$

Karena panjang AT adalah 13 maka diperoleh

$$\sqrt{4^2 + 3^2 + h^2} = 13$$
$$h = 12$$

Dicari vektor normal $\vec{N}$ untuk bidang TBC berdasarkan cross product antara $\overrightarrow{BC}$ dengan $\overrightarrow{BT}$

$$\vec{N} = k\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BT}$$
$$\vec{N} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$
$$\vec{N} = k \begin{pmatrix} 72 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Dipilih $= {}^{1}/_{24}$, diperoleh

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Namakan δ sudut antara AT dengan TBC, dan θ sudut antara $\overrightarrow{AT}$ dengan $\vec{N}$.

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AT} \cdot \vec{N}}{|\overrightarrow{AT}||\vec{N}|}$$

$$\cos\theta = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{13\sqrt{10}} = \frac{24}{13\sqrt{10}}$$

Karena δ adalah penyiku θ, maka $\sin\delta = \cos\theta = {}^{24}/_{13\sqrt{10}}$

Sehingga

$$\tan\delta = \frac{24}{2\sqrt{346}}.$$

Penutup

Berdasarkan pemaparan dalam bagian 3, disimpulkan bahwa semua jenis masalah jarak dan sudut dalam cakupan bab Dimensi Tiga tingkat SMA dapat diselesaikan dengan menggunakan pendekatan vektor yang sesuai. Sebagai langkah selanjutnya, perlu dilakukan suatu studi komparasi ataupun penelitian tindakan kelas untuk meneliti efektivitas maupun efisiensi dari pendekatan vektor yang dibahas dalam kajian teori ini. Harapan penulis semoga kajian teori mengenai Penyelesaian Masalah Jarak Dan Sudut Pada Bangun Ruang Dimensi Tiga Menggunakan Pendekatan Vektor ini dapat menjadi sarana untuk meningkatkan minat siswa terhadap ilmu Geometri, yang pada akhirnya dapat meningkatkan prestasi belajar siswa.

Daftar Pustaka

Anton, H. and Rorres, C. 2010. Elementary Linear Algebra 10^{th} ed: Applications Version. John Wiley & Sons. New York. USA. © 2010 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.